Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Dans tout ce chapitre, afin de simplifier les notations, on suppose que les variables X et Y considérées sont à valeurs entières et on note i ou j leurs valeurs. Bien sûr, tous les résultats se généralisent immédiatement en remplacant les i et j par des x_i et y_j.

1 Loi d'un couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises respectivement par X et Y.

Définition

On appelle couple de variables aléatoires (X,Y) l'application $\begin{aligned}(X,Y) : \Omega &\to \mathbb{R}^2\\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)).\end{aligned}$

La loi du couple (X,Y), appelée aussi loi conjointe, est l'ensemble

$$\big\{\big((i,j)\,,\, P(X=i\cap Y=j)\big) \text{ avec } i \in X(\Omega) \text{ et } j \in Y(\Omega)\big\}.$$

On pourra représenter cette loi par un tableau à double entrée.

Exemple :

On lance deux dés à 4 faces distinctes et on note X_1, resp. X_2 le résultat. Soit $Y = max(X_1, X_2)$.

Loi du couple (X_1, Y) : soit $(i,j) \in \{1,\dots,4\}^2$.

1. si $i > j$, alors comme $Y \geq X$, $(X_1 = i) \cap (Y = j) = \varnothing$ et $p_{i,j} = P((X_1 = i) \cap (Y = j)) = 0$.
2. si $i < j$, alors $(X_1 = i) \cap (Y = j) = (X_1 = i) \cap (X_2 = j)$ et par indépendance des deux lancers, $p_{i,j} = P(X_1 = i)P(X_2 = j) = (\frac{1}{4})^2$.
3. si $i = j$; on a $(X_1 = i) \cap (Y = i) = (X_1 = i) \cap (X_2 \leq i)$ (car sinon le maximum devient X_2).
   D'où par indépendance, $P((X_1 = i) \cap (Y = i)) = P(X_1 = i)P(X_2 \leq i)$.
   Puis $P(X_2 \leq i) = \sum\limits_{k=1}^{i} P(X_2 = k) = i * \frac{1}{4}$. On en déduit que $p_{i,j} = P((X_1 = i) \cap (Y = i)) = \frac{i}{16}$.

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	2/16	1/16	**1/16**
3	0	0	3/16	1/16
4	0	0	0	4/16

Remarques :

1. Contrairement aux tableaux de loi d'une seule variable, ce tableau contient des 0 ; ce qui signifie que le couple (X_1, Y) ne prend pas toutes les valeurs $[\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!] = X_1(\Omega) \times Y(\Omega)$. En fait, l'ensemble des valeurs prises par un couple (X,Y) sera toujours inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, mais pas forcément égal. En pratique, avant de déterminer la loi d'un couple (X,Y), on déterminera seulement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ et non l'ensemble des valeurs prises par le couple, car cet ensemble nécessite une étude plus poussée qui sera faite lors du calcul de la loi.
2. Si on somme tous les coefficients de ce tableau on obtient 1.

Réciproquement,

Théorème

$\{(i,j), p_{ij}),\ (i,j) \in I \times J\}$ est la loi d'un couple de variables à valeurs entières ssi $\begin{cases} p_{ij} \geq 0 \text{ pour tout } (i,j) \in I \times J \\ \text{et } \sum\limits_{(i,j)\in I\times J} p_{ij} = 1 \end{cases}$

Remarque :

Dans ce contexte, $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} p_{ij} = \sum\limits_{i\in I}\left(\sum\limits_{j\in J} p_{ij}\right) = \sum\limits_{j\in J}\left(\sum\limits_{i\in I} p_{ij}\right)$.

Pour les sommes doubles finies, ce résultat est détaillé dans la feuille de TD ; pour les sommes doubles infinies, il est à admettre.

2 Lois marginales

Les variables Xet Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y) et leur loi, loi marginale de X (resp. de Y).

Méthode pour trouver les lois marginales à partir de la loi du couple.
Supposons connue la loi du couple (X, Y) : $\{((i, j)\ ,\ P((X = i) \cap (Y = j)), (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$.
On cherche maintenant à connaître la loi de X i.e. l'ensemble des couples $\{(i, P(X = i)), i \in X(\Omega)\}$.
Or la famille des événements $\{(Y = j),\ j \in Y(\Omega)\}$ forme un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales appliquée à ce système complet d'événements, on obtient :
pour tout $i \in X(\Omega)$ fixé $\qquad P(X = i) = \sum\limits_{j \in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j))$.

De même, la loi de Y s'obtient à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(X = i),\ i \in X(\Omega)\}$:
pour tout $j \in Y(\Omega)$ fixé $\qquad P(Y = j) = \sum\limits_{i \in X(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j))$.

Exemple précédent :
Cherchons la loi marginale de X_1 :

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4	$P(X_1 = i)$
1	1/16	1/16	1/16	1/16	4/16
2	0	2/16	1/16	1/16	4/16
3	0	0	3/16	1/16	4/16
4	0	0	0	4/16	4/16

Justification :
Par exemple, $P(X_1 = 2) = \sum\limits_{j=1}^{4} P((X_1 = 2) \cap (Y = j)) = 0 + 2/16 + 1/16 + 1/16 = 4/16 = 1/4$. On fait la somme des coefficients sur la 2^e ligne. De même pour les autres valeurs prises par X.
On retrouve la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Evidemment, pour connaître la loi de X_1, il était inutile de calculer la loi du couple (X_1, Y) !

Cherchons maintenant la loi marginale de Y :

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	2/16	1/16	1/16
3	0	0	3/16	1/16
4	0	0	0	4/16
$P(Y = j)$	1/16	3/16	5/16	7/16

On vérifie, avant toute chose, que la somme des coefficients de la dernière ligne fait bien 1 !

Justification :
Par exemple $P(Y = 4) = \sum\limits_{i=1}^{4} P((X_1 = i) \cap (Y = 4))$. On est ramené à faire la somme des coefficients de la 4^e colonne. De même pour les autres valeurs prises par Y.

Remarque : pour déterminer la loi de Y qui est la loi d'un maximum, on a vu dans le chapitre sur les variables aléatoires une autre méthode via la fonction de répartition.
On a $Y(\Omega) = [\![1, 4]\!]$. Puis pour tout $j \in Y(\Omega)$,
$P(Y \leq j) = P((X_1 \leq j) \cap (X_2 \leq j)) = P(X_1 \leq j)P(X_2 \leq j)$ (lancers indépendants) $= \dfrac{j}{4}\dfrac{j}{4} = \dfrac{j^2}{16}$.
On obtient que $\forall j \in [\![1, 4]\!]$, $P(Y = j) = P(Y \leq j) - P(Y \leq j - 1) = \dfrac{j^2 - (j-1)^2}{16} = \dfrac{2j - 1}{16}$

3 Fonctions d'un couple de variables aléatoires

3.1 Somme de 2 variables aléatoires

Exemple précédent : X_1 et X_2 sont les résultats de deux dés à 4 faces distinctes et $Y = max(X_1, X_2)$. On a déterminé la loi conjointe de (X_1, Y). On cherche maintenant à connaître la loi de $X_1 + Y$.

Méthode : on note, dans chaque case du tableau à double entrée de la loi du couple, la valeur de la somme puis pour chaque valeur on somme les probabilités des cases concernées.

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$
1	1/16	1/16	1/16	1/16
	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$	$\underline{6}$
2	0	2/16	1/16	1/16
	$\underline{4}$	$\underline{5}$	$\underline{6}$	$\underline{7}$
3	0	0	3/16	1/16
	$\underline{5}$	$\underline{6}$	$\underline{7}$	$\underline{8}$
4	0	0	0	4/16

Alors par exemple, $P(X_1 + Y = 3) = \frac{1}{16} + 0$; $P(X_1 + Y = 5) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 0 + 0$ etc. ..

Justification

$(X_1 + Y = 5) = ((X_1 = 1) \cap (Y = 4)) \cup ((X_1 = 2) \cap (Y = 3)) \cup ((X_1 = 3) \cap (Y = 2)) \cup ((X_1 = 4) \cap (Y = 1))$

Les évenements de la réunion sont deux à deux incompatibles d'où le calcul de $P(X_1 + Y = 5)$.

Tableau de la loi de $X_1 + Y$:

k	2	3	4	5	6	7	8
$P(X_1 + Y = k)$	1/16	1/16	3/16	2/16	4/16	1/16	4/16

Formule générale :

Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors $X + Y$ est une variable aléatoire dont la loi s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$\forall n \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=n) = \sum_{i \in X(\Omega),\, n-i \in Y(\Omega)} P((X=i) \cap (Y=n-i))$$

Calcul de l'espérance de la somme $X + Y$, sous réserve d'existence :

1. Si on connaît la loi de X et de Y, et donc leur espérance, on utilise la linéarité de l'espérance, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

2. Si on connaît la loi de $S = X + Y$, on peut calculer l'espérance en utilisant la définition.

   Exemple précédent : loi de $X_1 + Y$

$S = k$	2	3	4	5	6	7	8
P (S=k)	1/16	1/16	3/16	2/16	4/16	1/16	4/16

   Et donc $E(X_1 + Y) = E(S) = 2\frac{1}{16} + 3\frac{1}{16} + ... + 8\frac{4}{16} = \frac{90}{16} = 5$.

3. Si on ne connaît que la loi du couple (X, Y), on utilise la formule de transfert :
   $E(X+Y) = \sum\limits_{\substack{i \in X(\Omega) \\ j \in Y(\Omega)}} (i+j)\ P((X=i) \cap (Y=j))$.

   Exemple précédent

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$
1	1/16	1/16	1/16	1/16
	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$	$\underline{6}$
2	0	2/16	1/16	1/16
	$\underline{4}$	$\underline{5}$	$\underline{6}$	$\underline{7}$
3	0	0	3/16	1/16
	$\underline{5}$	$\underline{6}$	$\underline{7}$	$\underline{8}$
4	0	0	0	4/16

Alors $E(X_1+Y) = 2\frac{1}{16} + 3\frac{1}{16} + 4\frac{1}{16} + 5\frac{1}{16} + 0 + 4\frac{2}{16}....$

3.2 Produit de 2 variables aléatoires

Exemple précédent : loi de $X_1 \cdot Y$

La démarche est analogue à celle de la section précédente : on repart du tableau de la loi conjointe de X_1 et Y.

$X_1 \setminus Y$	1	2	3	4
	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
	2	4	6	8
2	0	2/16	1/16	1/16
	3	6	9	12
3	0	0	3/16	1/16
	4	8	12	16
4	0	0	0	4/16

Alors par lecture du tableau : par exemple, $P(X_1 \cdot Y = 4) = 1/16 + 2/16 + 0 = 3/16$.

Justification

$(X_1 \cdot Y = 4) = ((X_1 = 1 \cap Y = 4)) \cup ((X_1 = 2) \cap (Y = 2)) \cup ((X_1 = 4) \cap (Y = 1))$.

Or les événements de la réunion sont 2 à 2 incompatibles d'où

$P(X_1 \cdot Y = 4) = P((X_1 = 1) \cap (Y = 4)) + P((X_1 = 2) \cap (Y = 2)) + P((X_1 = 4) \cap (Y = 1)) = 1/16 + 2/16 + 0.$

Tableau de la loi de $X_1 \cdot Y$:

$X_1 \cdot Y =$	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$P(X_1 \cdot Y = ...)$	1/16	1/16	1/16	3/16	1/16	1/16	3/16	1/16	4/16

La loi du produit sera rarement demandée, car la formule générale est complexe à utiliser : elle ne pourra être demandée que lorsque le tableau de la loi conjointe est tout petit. En revanche, l'espérance $E(XY)$ sera très souvent calculé en 2e année, car elle apparaît dans la définition de la covariance :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

La covariance permet de mesurer le degré de corrélation entre les variables X et Y.

Calcul de l'espérance du produit $X \cdot Y$, sous réserve d'existence :

1. si on connaît la loi de $X \cdot Y$ (cas rare), on calcule $E(X \cdot Y)$ à l'aide de la définition.
2. si on ne connaît que la loi du couple (X, Y), on utilise la formule de transfert (toujours la même !) :
   $E(X \cdot Y) = \sum\limits_{\substack{i \in X(\Omega) \\ j \in Y(\Omega)}} ij \times P((X = i) \cap (Y = j))$

Remarque : Attention, en général, $E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$. Ce résultat n'est vrai que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes (programme de 2^e année).

3.3 Maximum-minimum de 2 variables aléatoires

La détermination de la loi des variables $Z = max(X, Y)$ ou $T = min(X, Y)$ rentre dans cette section mais les variables X et Y seront toujours supposées indépendantes. On utilisera donc l'indépendance, et non la loi du couple (X, Y) : c'est pourquoi on a pu étudier ces notions dans un précédent chapitre (section "Fonction de répartition" du chapitre "Variables aléatoires").

$\longrightarrow$ exercice 7 Feuille 19