Intégration sur un segment

Quelques calculs d'aires :

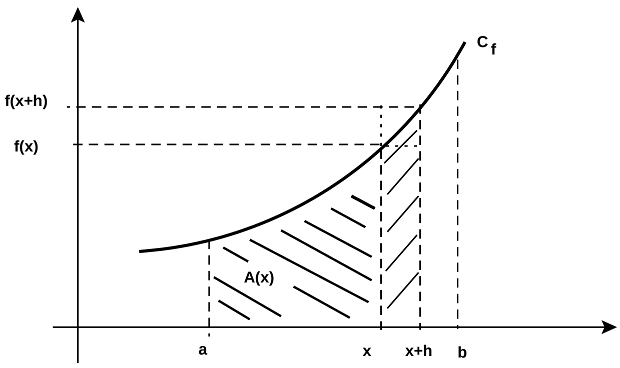
Aire du rectangle	$l \times L$
Aire du parallélogramme	$b \times h$
Aire du triangle	$\frac{B\times h}{2}$
Aire du disque de rayon r	πr^2

1 Primitives

1.1 Définition - Propriétés

Définition
On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'**intervalle** I
si F est dérivable sur I et si $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
Exemple
$F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^2$.

Exemple fondamental :
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.
Pour simplifier, on se placera dans le cas où f est croissante et positive sur $[a, b]$.
On note $\mathcal{A}$ la fonction qui à tout réel $x \in [a, b]$ associe l'aire de la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses, entre les abscisses a et x (On admet qu'elle est bien définie sur $[a, b]$).



Montrons que $\mathcal{A}$ est dérivable en tout $x \in [a, b]$
et que $\mathcal{A}'(x) = f(x)$
càd que $\mathcal{A}$ est une primitive de f sur $[a, b]$.

Posons $h > 0$: $\mathcal{A}(x + h) - \mathcal{A}(x)$ est l'aire comprise entre les abscisses x et $x + h$.
Par croissance de f, cette aire est comprise entre le petit rectangle de hauteur $f(x)$ et le grand rectangle de hauteur $f(x + h)$. D'où $\quad f(x) \times h \leq \mathcal{A}(x + h) - \mathcal{A}(x) \leq f(x + h) \times h$.
On en déduit que $f(x) \leq \dfrac{\mathcal{A}(x + h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x + h)$. Par continuité de f, $f(x + h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$ et donc, d'après le théorème d'encadrement, le taux d'accroissement de $\mathcal{A}$ admet une limite à droite en x
donc $\mathcal{A}$ est dérivable à droite en x et $\mathcal{A}'_d(x) = f(x)$.
Par un raisonnement analogue quand $h < 0$, on obtient que $\mathcal{A}$ est dérivable à gauche et que $\mathcal{A}'_g(x) = f(x)$.
Conclusion : Comme pour tout $x \in [a, b]$ $\mathcal{A}'_d(x) = f(x) = \mathcal{A}'_g(x)$,
$\mathcal{A}$ est dérivable en tout $x \in [a, b]$ et $\mathcal{A}'(x) = f(x)$.
Remarque : $\mathcal{A}(a) = 0$; en fait $\mathcal{A}$ est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a.

`Théorème`
Toute fonction continue sur un intervalle I possède au moins une primitive sur I.

`Théorème` Soit F une primitive de f sur l'intervalle I.
Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

`Démonstration`
Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G = F + k$, alors $G' = F' + 0 = f$ donc G est bien une primitive de f sur I.

Réciproquement, soit G une primitive de f sur I. Alors $F-G$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc la fonction $F-G$ est constante sur I.
Donc, $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in I,\ F(x) - G(x) = k$. $\square$

`Théorème` Soit f une fonction continue sur I et $x_0 \in I$.
Alors pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

`Démonstration`
L'existence est donnée par le théorème précédent.
Montrons l'unicité : soient deux primitives F et G qui conviennent. On sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que $F = G + k$. Mais $y_0 = F(x_0) = G(y_0) + k = y_0 + k$ implique $k = 0$ et $F = G$. $\square$

Exemples

1. Chercher la primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x + 1$ qui s'annule en 1.
   Une telle primitive est de la forme $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + x + k$. Or $F(1) = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$. D'où l'unique solution : $x \mapsto \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$.

2. Chercher la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $g : x \mapsto \frac{1}{x^2} + 3$ qui s'annule en 2.
   On trouve la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x} + 3x - \frac{11}{2}$.

1.2 Primitives de référence

$f(x)$	$F(x)$	intervalle I
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $n < 0$
avec $n = -2$, $\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$
avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$u'(x)(u(x))^n \quad (n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\})$	$\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$	$I \subset \mathcal{D}_u$ et si $n < 0$, u ne s'annulant pas
avec $n = -2$, $\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u} + C$	u ne s'annulant pas sur I
$u'u^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\})$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	u strictement positive sur I
avec $\alpha = -\frac{1}{2}$: $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\| + C$	u ne s'annulant pas sur I
$u'e^u$	$e^u + C$	$I \subset \mathcal{D}_u$

On fera particulièrement attention à la valeur absolue pour la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
En effet, vérifions que $g : x \mapsto \ln|x|$ est bien une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ comme sur $\mathbb{R}_+^*$:
si $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $|x| = -x$ donc $g(x) = \ln(-x)$ et $g'(x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$; et si $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g(x) = \ln(x)$ d'où $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

1.3 Opérations sur les primitives

`Proposition`
Soient F et G deux fonctions qui sont des primitives respectivement de f et de g et soit λ un nombre réel.

1. $F+G$ est une primitive de $f+g$,
2. λF est une primitive de λf.

`Démonstration`
Par linéarité de la dérivation $(F+g)' = F' + G' = f + g$ et $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$. $\square$

2 Intégration sur un segment

2.1 Définitions

DÉFINITION
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f et on le note $\int_a^b f(t)dt$.
Par convention, $[F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$ et donc on a l'écriture suivante : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$.

Exemple : $\int_1^2 x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.
Quel résultat aurait-on obtenu si on avait choisi la primitive $x \to \frac{x^3}{3} + 3$?

Remarque
Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie ; en effet si l'on remplace la primitive F par une primitive G, on sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F+k$. Alors on a $G(b)-G(a) = F(b)+k-(F(a)+k) = F(b)-F(a)$.

`Théorème`
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$ alors la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0. En particulier, F est de classe C^1 sur I et sa dérivée est $F' = f$.

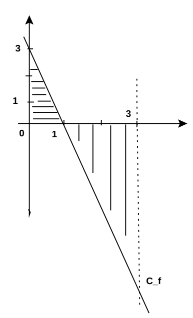
Exemples
1. $f : x \mapsto x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $F : x \mapsto \int_1^x (t+1)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 1. Or $F(x) = [\frac{t^2}{2} + t]_1^x = \frac{x^2}{2} + x - (\frac{1^2}{2} + 1) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$. On retrouve bien le même résultat !
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc $x \mapsto \int_1^x \dfrac{dt}{t}$ est l'unique primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 : on la note ln. On obtient que ln est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

.

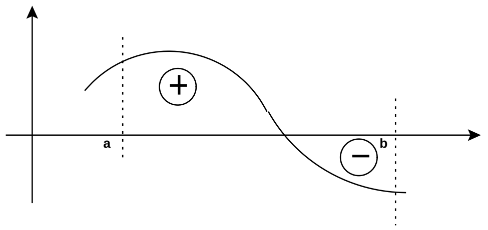
2.2 Interprétation graphique

Exemple : soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = -3x+3$.
Alors une primitive de f est $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$. Donc $\int_0^1 f(t)dt = F(1) - F(0) = 3 - 3/2 = 3/2$.

Représenter la fonction et calculer l'aire du triangle délimité par la courbe de f sur $[0,1]$ et les deux axes : on obtient 3/2.
Maintenant, considèrons la fonction f sur $[0,3]$:
$\int_0^3 f(t)dt = F(3) - F(0) = -3/2 * 9 + 3 * 3 = -9/2$.
Si on calcule l'aire des deux triangles du dessin : on obtient 3/2 et 6 ; on remarque alors que $3/2 - 6 = -9/2$.



Plus généralement, si $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire **signée** du domaine délimité par $\mathcal{C}$ (courbe représentative de f dans un repère orthonormé), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



2.3 Propriétés générales de l'intégrale

2.3.1 Premières propriétés

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.
Les propriétés suivantes découlent de la définition de l'intégrale :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \qquad\qquad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

En effet, si F est une primitive de f, on sait que $\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$ et
$\int_b^a f(t)dt = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(t)dt$.

2.3.2 Relation de Chasles

`Proposition`
Soit f une fonction continue sur I et soit a, b, c trois éléments de I alors on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

2.3.3 Linéarité de l'intégrale

`Proposition`
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: alors

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

2.3.4 Positivité et inégalités

`Proposition`
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ avec $a \leq b$.

1. Si $\forall t \in [a;b]$ $f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$
2. Si $\forall t \in [a;b]$ $f(t) \geq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$

Remarque
Cette proposition signifie que l'on peut intégrer des inégalités, **à condition que** les bornes de l'intégrale soient dans le bon sens : graphiquement, l'intégrale étant représentée par une aire, cette proposition est évidente.
Attention, si les bornes sont dans le mauvais sens, tout devient faux car
$\int_b^a f(t)dt \geq \int_b^a g(t)dt \Leftrightarrow -\int_a^b f(t)dt \geq -\int_a^b g(t)dt \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$!

`Démonstration` 1.
Soit F une primitive de f. Alors F est dérivable et $F' = f \geq 0$ par hypothèse, donc F est croissante.

On en déduit que $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \geq 0$ si $a \leq b$. $\square$

`Proposition`

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Si $\forall t \in [a;b]$ $f(t) \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a;b]$.

`Proposition`
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

1. **Inégalité triangulaire** : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$
2. **Inégalité de la moyenne** : soient m et M deux réels tels que pour tout $t \in [a,b]$ $m \leq f(t) \leq M$. Alors $m \leq \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$.

`Démonstration`
2. on sait : $\forall t \in [a,b]$, $m \leq f(t) \leq M$ donc par la proposition précédente, comme $a \leq b$:
$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt$. Or $\int_a^b m dt = [mt]_a^b = mb - ma = m(b-a)$.
D'où $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$. On conclut en divisant par $b-a>0$. $\square$

3 Méthodes de calcul des intégrales

3.1 Méthode directe

Dès que l'on connait une primitive de la fonction à intégrer, on peut calculer l'intégrale en utilisant la définition.
Exemple : $\int_1^2 \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = [\sqrt{t^2+1}]_1^2 = \sqrt{5}-\sqrt{2}$.

3.2 Intégration par partie

`Théorème`
Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a;b]$ alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

`Démonstration`
En effet, si u et v sont deux fonctions C^1 sur $[a,b]$ alors uv est C^1 sur $[a,b]$ et $(uv)'(t) = u'(t)v(t)+u(t)v'(t)$. D'où $\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'(t)v(t)+u(t)v'(t))dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$. On conclut en remarquant que $\int_a^b (uv)'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$. $\square$

Exemple important : calcul d'une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction ln étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $x \mapsto \int_1^x \ln(t)dt$ en est une primitive (c'est l'unique primitive qui s'annule en 1). Calculons cette intégrale via une intégration par parties en posant :
$u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$. Alors $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle $[1,x]$, pour $x>0$, donc : $\int_1^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x dt = x\ln(x) - x + 1$.
Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sont donc les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

3.3 Changement de variable

`Théorème`
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et u une fonction C^1 sur $[\alpha;\beta]$ telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$$

Attention : Penser à changer les bornes d'intégration !
Changement de variable : on a posé $x = u(t)$, alors $dx = u'(t)dt$ et $t = \alpha \Rightarrow x = u(\alpha)$ et $t = \beta \Rightarrow x = u(\beta)$.

`Démonstration`
Toutes les fonctions sont continues donc les intégrales ont bien un sens.
Soit F une primitive de f et $G = F \circ u$; alors F et G sont de classe C^1 et

$G'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$.
D'où $\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = \int_\alpha^\beta G'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$. □

Exemples :
1. Calcul de $I = \int_1^2 \frac{2t}{3t^2+1}dt$. On effectue le changement de variable $x = t^2 (= u(t))$.
Alors $dx = 2t\,dt = (u'(t)dt)$ et les bornes deviennent : $t = 1 \Rightarrow x = 1^2 = 1$ et $t = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$.
D'où $I = \int_1^4 \frac{1}{3x+1}dx = \frac{1}{3}[\ln|3x+1|]_1^4 = \frac{\ln(13)-\ln(4)}{3}$.

2. Calcul de $I = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{-t}}dt$ en posant $x = e^t$.
Alors $dx = e^t dt$ et les bornes deviennent : $t = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$ et $t = 1 \Rightarrow x = e^1 = e$. d'où $I = \int_1^e \frac{dx}{1+1/x} = \int_1^e \frac{x}{x+1}dx = \int_1^e 1 - \frac{1}{x+1}dx = [x - \ln|x+1|]_1^e = e - \ln(e+1) - 1 + \ln(2)$.

3. Transformation de $J = \int_{-2}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ en posant $x = -t$. Alors $dx = -dt$, et les bornes deviennent : $x = -2 \Rightarrow t = 2$ et $x = 0 \Rightarrow t = 0$. En utilisant maintenant l'égalité de la droite vers la gauche, on obtient $J = \int_2^0 \frac{-dt}{1+(-t)^2} = -\int_0^2 \frac{-dt}{1+t^2} = \int_0^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$!

`Proposition` Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$.
1. Si f est paire sur $[-a;a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
2. Si f est impaire sur $[-a;a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

`Démonstration`
Cette proposition se visualise très bien graphiquement avec des considérations d'aire. Sinon, par le calcul :
1. Supposons f paire. D'après la relation de Chasles, $\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$.
Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $t = -u$; alors $dt = -du$ et $t = 0 \Rightarrow u = 0$, $t = -a \Rightarrow u = a$ d'où $\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du$ car f est paire. □

4 Fonctions définies par une intégrale

Dans cette section, le but n'est plus de calculer des intégrales, mais d'obtenir des propriétés sur des fonctions définies par une intégrale. L'étude sera faite intégralement dans les exercices, mais le point méthode est le suivant :
Repérer de quel type est la fonction définie par une intégrale en jeu. Il y en a deux :

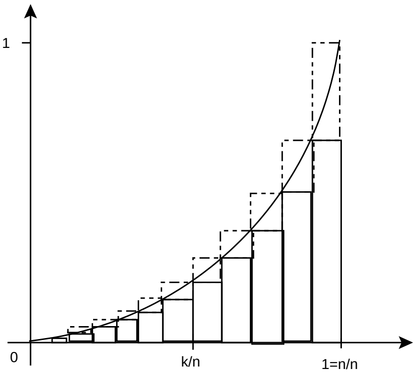
$$F : x \mapsto \int_{cste}^x f(t)dt \qquad \text{ou} \qquad G : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

Dans le cas du premier type : étudier la continuité de f, pour en déduire que la fonction F est l'unique primitive de f sur ... et qui s'annule en *cste*.
Le deuxième type est plus difficile : étudier la continuité de f sur ... . Alors, on sait qu'il existe une primitive de f sur ... : on la note F. On obtient que $G(x) = [F(t)]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$; on peut alors poursuivre en utilisant les propriétés de F : F étant une primitive de f sur ..., F est dérivable, même C^1 sur ... et $F' = f$ d'où par composition, G est dérivable, même C^1 et $G'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = ...$

5 Sommes de Riemann

5.1 Convergence des sommes de Riemann

Exemple :
On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^2$.
Méthode des rectangles : on considère les rectangles de base $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ et de hauteur $f(\frac{k}{n}) = (\frac{k}{n})^2$ ainsi que ceux de hauteur $f(\frac{k+1}{n}) = (\frac{k+1}{n})^2$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.



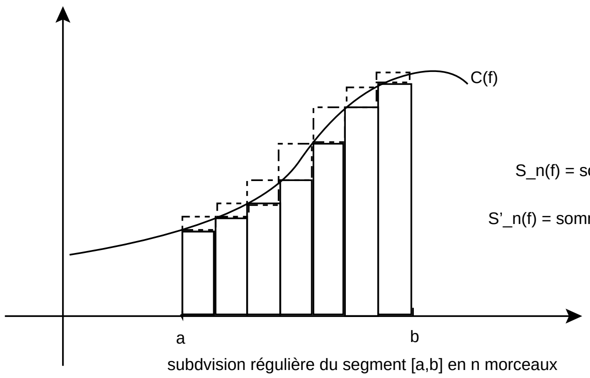
On note S_n la somme des aires des petits rectangles , et S'_n la somme des aires des grands rectangles.

On va vérifier que si n est suffisamment grand, la somme des aires de ces rectangles forment un encadrement assez précis de la valeur de $\int_0^1 x^2dx = 1/3$.
$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}) \times (\frac{k}{n})^2 = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}(\frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=0}^{n-1}k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.
et de même $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}) \times (\frac{k+1}{n})^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(\frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
On remarque que $S_n \leq \int_0^1 x^2 \leq S'_n$ et $S'_n - S_n = \frac{6n}{6n^2} = \frac{1}{n}$; donc S_n (ou S'_n) est une bonne valeur approchée de l'intégrale de f.
En particulier, il est facile de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1/3 = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$ (et $1/3 = \int_0^1 x^2dx$!).

Définition
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et n un nombre entier strictement positif. On appelle sommes de Riemann de f sur $[a;b]$ les expressions

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \qquad \text{et} \qquad S'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

Ce nombre est en fait la somme des aires des rectangles associés à la courbe de f.



En particulier si $a = 0$ et $b = 1$: $\quad S_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\dfrac{k}{n}) \quad$ et $\quad S'_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n})$

Le résultat que l'on a obtenu dans l'exemple se généralise :
`Théorème`
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ alors les suites $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ et $(S'_n(f))_{n\geqslant 1}$ convergent et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} S'_n(f)$$

Remarque
On déduit de ce théorème que $S_n(f)$ est une bonne approximation (valeur approchée) de $\int_a^b f(t)dt$ dès que n est suffisamment grand.

`Démonstration`
Par souci de simplification, on va démontrer ce résultat dans le cas où f est monotone, par exemple croissante, avec $a = 0$ et $b = 1$. Il nous faut donc montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\dfrac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)dt$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$, et soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Par croissance de f, $\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $f(\frac{k}{n}) \leq f(t) \leq f(\frac{k+1}{n})$ et donc d'après l'inégalité de la moyenne, $f(\frac{k}{n}) \leq \frac{1}{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}} \int_{k/n}^{k+1/n} f(t)dt \leq f(\frac{k+1}{n})$

soit $\frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \leq \int_{k/n}^{k+1/n} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n})$. En sommant ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{k+1/n} f(t)dt \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.
Relation de Chasles : $S_n(f) \leq \int_0^1 f(t)dt \leq S_n(f) - f(0)/n + f(1)/n$.
D'où l'encadrement : $\int_0^1 f(t)dt + \dfrac{f(0) - f(1)}{n} \leq S_n(f) \leq \int_0^1 f(t)dt$.
On conclut à l'aide du théorème d'encadrement. $\square$

5.2 Application à la convergence de certaines suites : exemple

Soit $u_n = \dfrac{1}{n^4} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k^3$. Alors $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\dfrac{k}{n})^3 = \dfrac{1-0}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(0 + (1-0) \times \dfrac{k}{n})^3$.
Ainsi u_n est la $n^{ème}$ somme de Riemann de la fonction f définie par $f(x) = x^3$, qui est continue sur $[0;1]$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int\limits_0^1 x^3 dx = \dfrac{1}{4}$.