Lois usuelles discrètes et Modélisation

1 Lois usuelles finies

1.1 Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ notée $\boxed{\mathcal{U}([\![1,n]\!])}$ si $\boxed{X(\Omega) = [\![1,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{n}}$

Autrement dit, si X prend toutes ses valeurs avec la même probabilité.

Cas typique
Soit X le résultat d'un lancer de dé non truqué : alors $\forall i \in [\![1,6]\!]$, $P(X=i) =$ donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}($ $)$
La loi Uniforme est la loi qui **modélise** le lancer de dé équilibré.

Espérance et Variance

Si X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, alors $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$.

Remarque : Plus généralement, la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ (avec $a<b$ entiers) est notée $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$:
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ si $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$ et si $\forall k \in [\![a,b]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$ (il y a $b-a+1$ valeurs dans $[\![a,b]\!]$!)
Les valeurs de l'espérance et de la variance sont alors à démontrer à chaque fois.

1.2 Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable X suit la loi de Bernoulli de paramètre p notée $\boxed{\mathcal{B}(1,p) \text{ ou } \mathcal{B}(p)}$ si $\boxed{X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } P(X=1) = p. \text{ Alors } P(X=0) = 1-p}$

Cas typique
On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est p, et soit X la variable qui vaut 1 si l'on obtient face, et 0 sinon. Alors $P(X=1) = P(\text{"obtenir face "}) = p$ et $P(X=0) = P(\text{"obtenir pile "}) = 1-p$.
La loi de Bernoulli est la loi qui **modélise** le lancer de pièce.

Remarque : si $p = 1/2$, on obtient la loi uniforme sur $[\![0,1]\!]$ puisque alors $P(X=0) = P(X=1) = 1/2$.

Espérance et Variance

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\boxed{E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1-p)}$.

1.3 Loi binomiale

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p, notée $\boxed{\mathcal{B}(n,p)}$ si $\boxed{X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$

Cas typique
On lance n fois, de manière indépendante, une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est p, et on note X la variable égale au **nombre** de faces obtenues durant ces n lancers. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque

1. La loi de Bernoulli est le cas particulier d'une loi binomiale de taille 1
2. On définit bien une loi de probabilité car $\forall k \in \{0,\dots,n\}$, $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq 0$
   et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1-p+p)^n = 1$ d'après le binôme de Newton.

Autre description de la loi binomiale :
Si on reprend le cas typique précédent et que l'on note X_i la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on obtient pile au i^e lancer et 1 si l'on obtient face à ce i^e lancer. Alors X_i est une variable de Bernoulli de paramètre p et comme les lancers sont indépendants, les variables X_i sont indépendantes.
De plus, il y a une relation entre X et les X_i : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

`Théorème`
La somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Espérance et Variance

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors $\boxed{E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)}$

Exercice :
Considérons un jugement qui doit être voté par 9 des 12 membres d'un jury pour devenir exécutoire. Les jurés ont le choix entre 2 décisions A et B ; ils se déterminent indépendamment les uns des autres, et la probabilité de choisir la décision A est a pour chacun. Quelle est la probabilité que la décision A soit adoptée par le jury ?
indication : introduire X, la variable aléatoire égale aux nombre de jurés qui choisissent la décision A.

1.4 Loi hypergéométrique

Cas typique
On considère une urne qui contient N boules au total dont R rouges et $N-R$ blanches.
On effectue un tirage **simultané** de n boules **OU** n tirages **successifs sans remise** d'une boule dans cette urne, et soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

La loi de X est appelée loi hypergéométrique de paramètres $N, n, p = R/N$, notée $\boxed{\mathcal{H}(N, n, p)}$.
$X(\Omega) = [\![max(0, n - N + Np), min(Np, n)]\!]$ et les probabilités d'apparition sont $P(X = k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Espérance
Si X suit la hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$, alors $\boxed{E(X) = np}$.

Approximation : si $n << N$, la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ est approchée par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, car si le nombre de tirages n est petit devant la taille de l'urne N, des tirages sans remise s'apparentent à des tirages avec remise : en effet, ce qui différencie principalement ces deux tirages c'est de modifier (ou non) le contenu de l'urne, et d'obtenir (ou non) une boule différente à chaque tirage. Mais si le nombre de boules de l'urne est vraiment grand par rapport à n : le fait d'enlever les boules tirées ne va pas modifier réellement l'urne, et même si on remet les boules, il n'y a quasiment aucune chance de tirer deux fois la même !

2 Lois usuelles discrètes infinies

2.1 Loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\boxed{\mathcal{G}(p)}$
si $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = p(1-p)^{n-1}}$

Remarque : On définit bien ainsi une loi de probabilité car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p(1-p)^{n-1} \geq 0$,
et $\sum_{n=1}^{N} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=0}^{N-1} (1-p)^n \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{1-(1-p)} = 1$

Cas typique
On effectue des lancers indépendants d'une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir face est p, *jusqu'à* l'obtention d'un face. On introduit alors X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.
On dit également que X est le **temps d'attente** du premier face. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Espérance et Variance
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors X admet une espérance et une variance et $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}, V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$.

Exercice :
Supposons qu'un ordinateur a une probabilité p de tomber en panne à chaque instant, indépendamment des instants précédents (modèle qui ne prend pas en compte le vieillissement de la machine).
Soit T l'instant de première panne. Quelle est la loi de T ?

2.2 Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, notée $\boxed{\mathcal{P}(\lambda)}$
si $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}$.

Remarque
On définit bien une loi de probabilité car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \geq 0$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$.

Espérance et Variance
Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors X admet une espérance et une variance et $\boxed{E(X) = V(X) = \lambda}$.